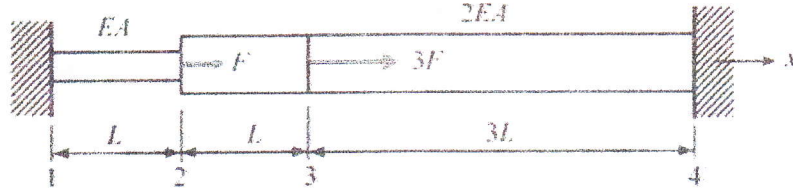


EMD 1
Module : Méthode Des Eléments Finis

التمرين 1 (6 نقاط)

لتكن الرافدة ذات المحور x كما هي موضح في الشكل. و ليكن E هو معامل يونغ للمادة. المرونة الخطية تساوي EA بين العقدتين 1 و 2، وتساوي $2EA$ بين العقدتين 2 و 4.

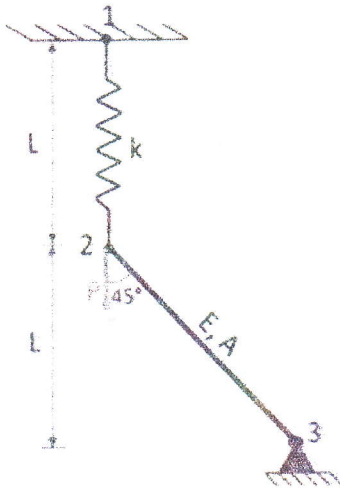


الرافدة موثوقة في العقدتين 1 و 4 ويتم التأثير عليها عند العقدة 2 بقوة $(F, 0)$ وعند العقدة 3 بواسطة قوة $(3F, 0)$ مع $F > 0$.
أوجد:

1. مصفوفة المرونة الأولية لكل عنصر.
2. مصفوفة المرونة الشاملة للهيكل.
3. الإزاحة في العقدتين 2 و 3.
4. ردود الأفعال في العقدتين 1 و 4.

التمرين 2 (6 نقاط)

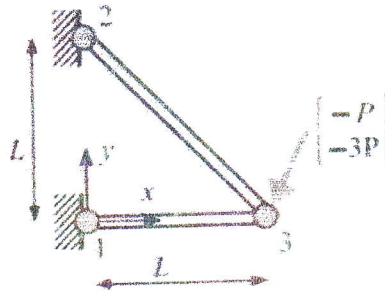
ليكن النظام الموضح في الشكل المقابل. يتكون هذا الشكل من قضيب ذو خصائص E و A ونابض ذو ثابت مرونة k . يتم تطبيق قوة $P = 2 \text{ KN}$ على العقدة "2".



1. ما هو عدد درجات الحرية لهذا النظام؟
 2. اكتب مصفوفة المرونة المحلية لكل عنصر من عناصر هذا الهيكل.
 3. اكتب المصفوفة الأولية لكل عنصر في المعلم العام.
 4. أعط مصفوفة المرونة الشاملة للهيكل.
 5. تحديد الإزاحة عند العقدة 2.
- المعطيات: $k = 100 \text{ KN/m}$, $L = 1 \text{ m}$, $A = 25 \text{ mm}^2$, $E = 10 \text{ 000 MPa}$

التمرين 3 (6 نقاط)

النظام المثلثي في المستوي الموضح في الشكل يتكون من قضيبين مفصليين معاً. العقد 1 و 2 و 3 مفصلية. ليكن E و σ_E هما على التوالي معامل يونغ والحد المرن للمادة. مساحة المقاطع المستقيمة تساوي A .



تحمل العقدة 3 قوة مكونتها $(-P, -3P)$ مع $P > 0$.
أوجد:

1. مصفوفة المرونة الأولية لكل عنصر.
2. مصفوفة المرونة الشاملة للهيكل.
3. الازاحات في العقد.
4. ردود الافعال في العقدتين 1 و 2.
5. القوى الناعضية والاجهادات في كل عنصر.

أسئلة الدروس (2 نقطة)

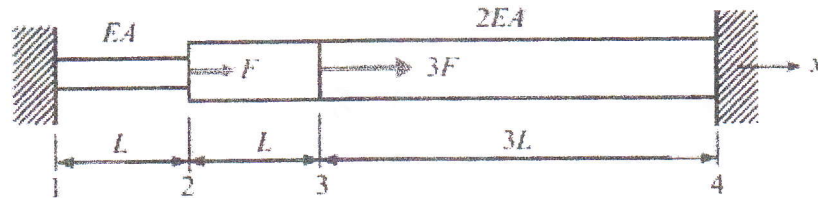
أعط الخطوات المختلفة لطريقة العناصر المحدودة المباشرة.

وفقكم الله

EMD 1
Module : Méthode Des Eléments Finis

Exercice 1 (6 pts)

Considérons la poutre d'axe x représentée sur la figure. Soit E le module de Young du matériau. La rigidité linéique est égale à EA entre les nœuds 1 et 2, $2EA$ entre les nœuds 2 et 4.



La poutre est encastree en 1 et 4. Elle est sollicitée au nœud 2 par une force $(F, 0)$ et au nœud 3 par une force $(3F, 0)$ avec $F > 0$.

Trouver :

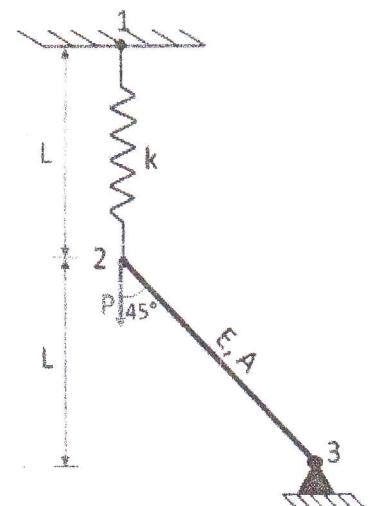
- 1) La matrice de rigidité élémentaire pour chaque élément.
- 2) La matrice de rigidité globale de la structure.
- 3) Le déplacement dans les nœuds 2 et 3.
- 4) Les réactions dans les nœuds 1 et 4.

Exercice 2 (6 pts)

Soit le système montré en figure ci-contre. Celui-ci est composé d'une barre de caractéristiques « E et A » et d'un ressort de rigidité « k ». Une charge d'intensité « $P=2\text{ KN}$ » est appliquée au nœud « 2 ».

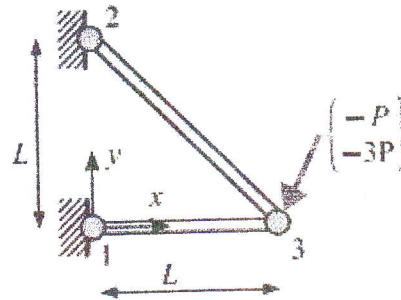
- 1) Quel est le nombre de degrés de liberté pour ce système ?
- 2) Ecrire la matrice de rigidité locale de chaque élément de cette structure.
- 3) Ecrire la matrice globale élémentaire pour chaque élément.
- 4) Donner la matrice de rigidité globale de la structure.
- 5) Déterminer le déplacement au nœud 2.

Données : $E = 10\,000\text{ MPa}$, $A = 25\text{ mm}^2$, $L = 1,00\text{ m}$ et $k = 100\text{ KN/ml}$.



Exercice 3 (6 pts)

Le treillis plan représenté sur la figure est composé de deux barres articulées entre elles. Les nœuds 1, 2 et 3 sont articulés. Soient E et σ_E respectivement le module de Young et la limite élastique du matériau. L'aire des sections droites est égale à A .



Le nœud 3 porte une force de composantes $(-P, -3P)$ avec $P > 0$.

Trouver :

- 1) La matrice de rigidité élémentaire pour chaque élément.
- 2) La matrice de rigidité globale de la structure.
- 3) Les déplacements dans les nœuds.
- 4) Les réactions dans les nœuds 1 et 2.
- 5) Les efforts et les contraintes dans chaque barre.

Questions de cours (2 pts)

-Donner les différentes étapes de la méthode des éléments finis directe.

EESET, Skikda
4^{em} Année G.M
2023-2024

correction de l'EMD 1
Module: MEF.

Exercice 01: 06/06

1) Les matrices de rigidité élémentaires sont:

Élément 1: 1-2 ; Élément 2: 2-3 ; Élément 3: 3-4

$$[K_1] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; [K_2] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; [K_3] = \frac{2EA}{3L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(0,5) (0,5) (0,5)

2) La matrice de rigidité globale de la structure:

$$[K_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2+\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(0,5)

Le système matriciel global s'écrit:

$$[K_e] \cdot \{u\} = \{F\} \Rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{Ad} \\ F \\ 3F \\ R_{4d} \end{Bmatrix}$$

(0,5) (0,5)

Les conditions aux limites:

$$u_1 = u_4 = 0.$$

(0,5)

3) Le déplacement dans les nœuds 2 et 3:

Après avoir entré les conditions aux limites le système réduit peut s'écrire comme suit:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 3F \end{Bmatrix} \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{13}{6} \frac{FL}{EA} ; u_3 = \frac{11}{4} \frac{FL}{EA} \quad (0,5) \quad (0,5)$$

4) Les réactions dans les nœuds 1 et 4:

$$\text{d'où: } \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{4x} \end{Bmatrix} \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow R_{1x} = -\frac{13}{6} F, \quad R_{4x} = -\frac{11}{6} F. \quad (0,5) \quad (0,5)$$

Exercice 2:

1) Le nombre de degré de liberté pour ce système.

Dans le repère global; nous avons 2 DDL par nœud
ce qui nous fait 6 DDL pour tout le système.

2) La matrice de rigidité locale de chaque élément de cette structure:

Élément 1: 1-2

Élément 2: 2-3

$$[k_1] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 100 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [k_2] = \frac{EA}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 176,77 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) La matrice globale élémentaire pour chaque élément

Élément 1: $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = -1$

$$[K_{e1}] = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 100 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Élément 2: $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$[K_{e2}] = 88,39 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4) La matrice de rigidité globale de la structure :

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 88,39 & -88,39 & -88,39 & 88,39 \\ 0 & -100 & -88,39 & 188,39 & 88,39 & -88,39 \\ 0 & 0 & -88,39 & 88,39 & 88,39 & -88,39 \\ 0 & 0 & 88,39 & -88,39 & -88,39 & 88,39 \end{bmatrix}$$

0,5

5) Le déplacement au nœud 2 :

Après avoir entré les conditions aux limites le système

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0.$$

0,5

Le système réduit peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} 88,39 & -88,39 \\ -88,39 & 188,39 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

0,5

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2 = -2 \text{ cm} \\ v_2 = -2 \text{ cm} \end{cases}$$

0,5

$$\Rightarrow u_3 = -4 \frac{PL}{EA} \quad (0,5), \quad v_3 = -\left(4 + 6\sqrt{2}\right) \frac{PL}{EA} \quad (0,5)$$

4) Les réactions dans 1 et 2 :

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{1x} = 4P \quad (0,25), \quad R_{1y} = 0 \quad (0,25), \quad R_{2x} = -3P \quad (0,25), \quad R_{2y} = 3P \quad (0,25)$$

5) Les efforts et les contraintes dans chaque barre :

$$* N_1 = \frac{EA}{L} \left(1(u_3 - u_1) + 0(v_3 - v_1) \right) = -4P \quad (0,5)$$

$$* N_2 = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(u_3 - u_2) - \frac{\sqrt{2}}{2}(v_3 - v_2) \right) = 3\sqrt{2}P \quad (0,5)$$

$$* \bar{V}_1 = \frac{N_1}{A} = -\frac{4P}{A} \quad (0,25)$$

$$* \bar{V}_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{3\sqrt{2}P}{A} \quad (0,25)$$

Question de cours : Les différentes étapes de la méthode des éléments finis directe :

- 1 - Former la matrice de rigidité K^e pour chaque élément. (0,5)
- 2 - Assembler la matrice de rigidité globale K du système à partir de K^e pour chaque élément. (0,5)
- 3 - Appliquer les conditions aux limites. (0,25)
- 4 - Résoudre afin d'obtenir les déplacements, et les réactions si nécessaire. (0,25)
- 5 - Utiliser les relations charge - déplacement de l'élément pour obtenir les forces internes. (0,5)

Exercice 3:

1) La matrice de rigidité élémentaire pour chaque élément:

* Élément 1: 1-3, L , E , A , ($\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1, \sin \theta = 0$).

$$[K_1] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* Élément 2: 2-3, $L\sqrt{2}$, E , A , ($\theta = -45^\circ \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$).

$$[K_2] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) La matrice de rigidité globale de la structure:

$$[K_e] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2\sqrt{2} & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Les déplacements dans les nœuds:

Après avoir écrit les conditions aux limites: $u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = 0$
le système réduit peut s'écrire comme suit:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ -3P \end{Bmatrix}$$